**MẶT F- ĐỘ CÔNG HẰNG TRONG KHÔNG GIAN GAUSS G3**

**Trương Văn Minh, Nguyễn Lê Trâm**

*Trường Đại học Quảng Bình*

***Tóm tắt.*** *Không gian Gauss hay còn gọi là không gian xác suất là không gian quen thuộc. Tuy nhiên, các đối tượng hình học trong không gian này ít khi được nhắc đến. Trong bài báo, chúng tôi khảo sát một số mặt có độ cong hằng thường gặp, qua đó giúp chúng ta có những hình dung chính xác đối với các đối tượng hình học trong không gian này.*

***Từ khóa:*** *Không gian Gauss, f- độ cong, không gian với mật độ.*

**1. MỞ ĐẦU**

Không gian với mật độ [4] là không gian n cùng với một hàm trơn dương, ký hiệu là e-*f*, dùng làm trọng số để đánh giá độ dài, diện tích, thể tích,… Để phân biệt với các khái niệm độ dài, diện tích, thể tích,… thông thường, các độ dài, diện tích, thể tích,… với mật độ lần lượt được gọi là *f*- độ dài, *f*- diện tích, *f*- thể tích,…. Không gian n với mật độ e*-f* được ký hiệu là {n, e*-f*}.

Nếu hàm với , thì mật độ được gọi là mật độ cầu. Đặc biệt, nếu , thì ta gọi không gian với mật độ{n,e-*f*} là không gian Gauss và ký hiệu là *Gn*. Vậy, thể tích của *Gn* được tính như sau:

Xét I chuyển sang tọa độ cực ta có:

hay . Do đó

.

Chính vì vậy, *Gn* còn được gọi là không gian xác suất.

Công thức tính *f*- độ cong đã được đưa ra cho các không gian tổng quát, kể cả trên các đa tạp với mật độ. Tuy nhiên, các tính toán cụ thể, những kết quả có thể giúp người mới tiếp cận có thể hình dung được tác động của mật độ đến hình dáng của các đối tượng hình học trong các không gian quen thuộc hầu như chưa có. Trong phần tiếp theo, chúng tôi sẽ khảo sát *f*- độ cong của một số mặt thường gặp như mặt phẳng, mặt cầu, mặt trụ, là các mặt có độ cong hằng trong không gian Euclide 3, qua đó giúp người đọc có thể hình dung cơ bản về mật độ cầu nói chung và mật độ Gauss nói riêng.

**2. MẶT *F*- ĐỘ CONG HẰNG TRONG *G3***

Trong mục này, khi ta nói mặt *S* thì ta hiểu đó là một siêu mặt chính quy, định hướng [4].

**Định nghĩa 1.** [2] Trong không gian với mật độ{n,e*-f*}, *f*- độ cong trung bình của mặt *S* tại một điểm bất kỳ được xác định bởi công thức:

(1)

Trong đó *H* là độ cong trung bình của mặt *S* trong n, *N* là vectơ pháp tuyến đơn vị của *S* tại điểm xét, là đạo hàm của *f* theo vectơ *N*.

Nếu là hàm hằng thì ta gọi *S* là mặt *f*- độ cong hằng. Đặc biệt, nếu thì ta gọi *S* là mặt *f*- cực tiểu.

***Định lý 1:*** *Trong không gian G3, f-độ công trung bình của mặt S tại một điểm bất kỳ được xác định bởi công thức:*

(2)

***Chứng minh*.** Ta có hàm mật độ

Nên

Công thức (1) có thể viết lại như sau ٱ

***Hệ quả 1.*** Mặt phẳng trong không gian *G3* là mặt có độ cong hằng. Hơn nữa, mặt phẳng là mặt *f*- cực tiểu khi và chỉ khi nó đi qua gốc tọa độ.

***Chứng minh.*** Trong 3, một mặt phẳng *P* bất kỳ có tham số hóa dạng:

,

Với là một điểm trên *P*, là hai vectơ chỉ phương trực chuẩn của *P*. Trong 3 thì mọi mặt phẳng đều là mặt cực tiểu. Trong *G3* ta có

Vì *N* là hằng trên *P* nên *P* là mặt *f*-độ cong hằng. Hơn nữa, *P* là mặt *f*- cực tiểu khi và chỉ khi hay *P* chứa gốc tọa độ.ٱ

Như vậy, trong *G3*, mặt phẳng không phải lúc nào cũng “phẳng”.

***Hệ quả 2.*** *Mặt cầu trong không gian G3 là mặt f-độ cong hằng khi và chỉ khi tâm mặt cầu trùng với gốc tọa độ.*

***Chứng minh.*** Mặt cầu tâm bán kinh *R* > 0 có tham số hóa

Ta có:

Nên

Ta có:

Do vậy, *f*- độ cong tại điểm bất kỳ trên mặt cầu được xác định bởi (3)

Từ (3) ta thấy mặt cầu đã cho có *f*-độ cong hằng khi và chỉ khi là hằng số, hay nói cách khác, mặt cầu có tâm tại gốc tọa độ. ٱ

***Nhận xét 1.*** *Trong G3 tồn tại mặt cầu f-cực tiểu là mặt cầu tâm O, bán kính .*

***Hệ quả 3****. Mặt trụ trong không gian G3 là mặt f- độ cong hằng khi và chỉ khi nó có trục đi qua gốc tọa độ.*

***Chứng minh.*** Mật độ trong *G3* là mật độ cầu nên bằng phép biến đổi tích hợp, mọi mặt trụ bán kính *R* > 0 đều có thể tham số hóa như sau:

Trong đó:

Ta có:

Nên

Do vậy, *f* - độ cong tại điểm bất kỳ trên mặt cầu được xác định bởi:

Vậy, mặt trụ là mặt *f*- độ cong hằng khi và chỉ khi là hằng số, hay là gốc tọa độ. ٱ

***Định lý 2.*** *Mặt có độ cong hằng trong3 có khoảng cách từ gốc tọa độ đến mặt phẳng tiếp xúc tại mọi điểm không đổi và giá trị cos của góc tạo bởi vectơ tham số và vectơ pháp tuyến tại mọi điểm không đổi dấu là mặt f- độ cong hằng trong G3.*

***Chứng minh.*** Trong *G3*, tại một điểm *X* bất kỳ trên mặt *S* ta có:

Với P là mặt phẳng đi qua gốc tọa độ, nhận *N* làm vectơ pháp tuyến. Gọi *TXS* là mặt phẳng tiếp xúc với *S* tại *X*, ta có *P* và *TXS* song song với nhau, nên:

Trong đó *O* là gốc tọa độ. ٱ

Do vậy, ta có thể khảo sát *f* - độ cong của một mặt *S* trong *G3* bằng cách khảo sát độ công trong 3 và khoảng cách từ gốc tọa độ đến các mặt phẳng tiếp xúc của nó.

***Hệ quả 4.*** *Trên không gian G3, các khẳng định sau là đúng:*

1. *Mặt cầu có tâm tại góc tọa độ là mặt f-đô cong hằng.*
2. *Các mặt kẻ tròn xoay có độ cong hằng và có trục đối xứng là các trục tọa độ là các mặt f- độ cong hằng.*
3. *Mặt phẳng là mặt f- độ cong hằng.*

**TÀI LIỆU THAM KHẢO**

**Tiếng Việt:**

[1] Phan Thị Thái Hòa (2009), *Mặt phẳng với mật độ*, Luận văn thạc sĩ, Trường ĐHSP Thành phố Hồ Chí Minh.

[2] Trần Lê Nam (2015), *Một số tính chất của mặt và đường trong không gian với mật độ*, Luận án tiến sĩ, Trường Đại học Vinh.

**Tiếng Anh:**

[3] Manfredo P. Do Carmo (1976), Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice Hall Profesional Technical Reference.

[4] Gronov M. (2003), Isoperimetry of waists and concentration of map, *Geom. Func. Anal*., Vol. 13, pp.178-215.

[5] Morgan. F. (2005), Manifold with density, *Notices Amer. Math. Soc*,. 52, pp853-858.

[6] Osserman R (1996), A survey of Minimal Surfaces, Van Nostrand – Reinhold, New York.

**SURFACE WITH CONSTANT *F-* CURVATURE IN GAUSS SPACE *G3***

***Abstract.*** *Gauss space, that is called probability space, is a familiar space. However, geometric objects in this space are rarely mentioned. In this paper, we survey some hypersurface with constant f- curvature in Gauss space in which we visualize them.*

***Keywords:*** *Gauss space, f-curevature, space with density.*

*\*Liên hệ:*

**ThS. Nguyễn Lê Trâm**

*Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Quảng Bình*

*Địa chỉ: 312 Lý Thường Kiệt, Đồng Hới, Quảng Bình*

*Email: letram07st@gmail.com.*